SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

IL PROBLEMA DI POMPEIU

24 MARZO 1988

1. INTRODUZIONE E STORIA DEL PROBLEMA

I risultati qui esposti fanno parte di un lavoro in collaborazione con F. Segala [GS].

Nel 1929 il matematico rumeno D. Pompeiu [P1] pose il seguente problema:

"Per quali insieme limitati $D \subset R^2$ *è vero che se per una data* $f \in C(R^2)$ *si ha per ogni movimento rigido* σ *di* R^2

$$(1.1) \qquad \int_{\sigma(D)} f(x)dx = 0,$$

allora $f \equiv 0$?

Quest'affascinante problema, noto come problema di Pompeiu,ha sfidato gli sforzi di molti matematici fin dalla sua formulazione originaria. D'ora in poi diremo che un insieme limitato $D \subset R^2$ ha la *proprietà di Pompeiu* se il fatto che (1.1) valga implica $f \equiv 0$. In [P1] Pompeiu stesso dimostrò, sotto la ulteriore ipotesi che f vada a zero all'infinito, che ogni quadrato ha la proprietà di Pompeiu. In seguito Christov [Ch] rimosse tale restrizione. In [P3] fu affermato e perfino erroneamente dimostrato che ogni cerchio in R^2 ha la proprietà di Pompeiu.

Quindici anni più tardi Chakalov [C] rilevò la falsità di tale risultato. Infatti, sia $B_R = \{x=(x_1,x_2) \in R^2 \mid x_1^2+x_2^2<R^2\}$ e scegliamo ad arbitrio $x_0 = (x_{0,1},x_{0,2}) \in R^2$. Se τ_{x_0} indica la traslazione

$$\tau_{x_0}(x) = x_0 + x \quad \text{in} \quad R^2$$

si ha, v. [GR, formula 10, p. 401]

$$(1.2) \qquad \int_{\tau_{x_0}(B_R)} \sin(ax_1)dx_1dx_2 = 4R^2 \sin(ax_{0,1}) \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \cos(aR \sin u)du$$

$$= \frac{2\pi R}{a} \sin(ax_{0,1}) J_1(aR),$$

dove J_1 denota la funzione di Bessel d'ordine uno.

E' chiaro da (1.2) che se si sceglie $a \in R$ tale che aR sia uno zero di J_1 si ha per ogni $x_0 \in R^2$

$$(1.3) \qquad \int_{\tau_{x_0}(B_R)} \sin(ax_1)dx_1dx_2 = 0.$$

Siccome il cerchio è invariante per rotazioni la (1.3) dimostra che il cerchio non ha la proprietà di Pompeiu.

Il problema di dare una caratterizzazione completa, possibilmente geometrica, di quegli insiemi limitati in R^2 che hanno la proprietà di Pompeiu è a tutt'oggi aperto. Nel seguito diamo un'esposizione della letteratura esistente per poi passare alla discussione di [GS]. Nel 1972 Zaleman ha per primo usato idee d'analisi armonica per dimostrare alcuni risultati concernenti un problema strettamente connesso a quello di Pompeiu, il *problema di Morera,* si veda [Z]:

" *Sia* $\{\Gamma\}$ *una famiglia di curve chiuse rettificabili in* C *e sia* $f \in C(C)$. *Se per ogni movimento rigido* σ *di* R^2

$$(1.4) \qquad \int_{\sigma(\gamma)} f(z)dz = 0 \qquad \textit{per ogni} \quad \gamma \in \{\Gamma\},$$

è possibile concludere che f è intera?".

Se $\{T\}$ è la famiglia di tutti i triangoli del piano la risposta al precedente quesito è affermativa e nota come Teorema di Morera. Una colle-

zione di curve $\{\Gamma\}$ per cui la risposta al problema di Morera è affermativa si dice che ha la *proprietà di Morera.* Zalcman ha osservato in [Z] che:

"*Se* $D \subset R^2$ *ha bordo rettificabile e se* D *ha la proprietà di Pompeiu, allora* $\{\partial D\}$ *ha la proprietà di Morera".*

Uno dei principali risultati in [Z] è dato dal seguente

Teorema 1.1. *Sia* $f \in L^1_{loc}(R^2)$ *e supponiamo che esistano numeri reali positivi distinti* r_1, r_2 *tali che per quasi ogni* $z \in C$

$$\int_{C_r(z)} f(\zeta)d\zeta = 0 \quad , \quad r \in \{r_1, r_2\},$$

dove $C_r(z) = \{\zeta \in C \mid |z-\zeta| = r\}$. *Sia* E_1 *l'insieme degli zeri della funzione di Bessel* J_1. *Se* $r_1/r_2 \notin E_1$, f *è quasi ovunque coincidente con una funzione intera su* C.

La dimostrazione del Teorema 1.1 poggia sul seguente profondo risultato di Laurent Schwartz. Nel seguito se $\mathscr{E}(R^n)$ e $\mathscr{E}'(R^n)$ denotano rispettivamente lo spazio $C^\infty(R^n)$, con l'usuale topologia di spazio di Frechet, e il suo duale, lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto, denotiamo con $\hat{T}(z) = T(e^{-i\langle z,\cdot\rangle})$ $z \in C^n$, la trasformata di Fourier di $T \in \mathscr{E}'(R^n)$. Indichiamo con $\hat{\mathscr{E}}'(R^n)$ lo spazio

$$\hat{\mathscr{E}}'(R^n) = \{\hat{T} \mid T \in \mathscr{E}'(R^n)\}.$$

Per il Teorema di Paley-Wiener $\hat{\mathscr{E}}'(R^n)$ si può identificare con lo spazio di tutte le funzioni intere F su C^n tali che

$$|F(z)| \leq C(1+|z|)^p e^{A|\mathrm{Im}\, z|} \quad , \quad z \in C^n \tag{1.5}$$

per certi $C>0$, $p \in N \cup \{0\}$, $A>0$.

Teorema 1.2. (L. Schwartz, [S]). *Sia* I *un ideale di* $\hat{\mathscr{E}}'(R)$ *le cui funzioni non abbiano zeri in comune in* C. *Allora esiste una successione* $(F_j)_{j \in N}$ *in* I *tale che*

$$\lim_{j\to\infty} F_j = 1 \quad \text{in} \quad \hat{\mathscr{E}}'(R).$$

Si dice che $F_j \to F$ in $\hat{\mathscr{E}}'(R^n)$ se F_j converge a F uniformemente sui sottoinsiemi compatti di C^n e inoltre la F_j verificano la (1.5) con costanti indipendenti da j. A quanto ci risulta la versione multi-dimensionale del Teorema 1.2 costituisce a tutt'oggi un problema aperto.

Nel 1973, riprendendo le idee di Zalcman [Z] basate sul Teorema 1.2 Brown, Schreiber e Taylor hanno dato una caratterizzazione di quei domini di R^2 per cui vale la proprietà di Pompeiu. Il loro risultato principale è costituito dal seguente

Teorema 1.3. (Brown, Schreiber e Taylor, [BST]). *Sia* Ω *un aperto limitato di* R^2 *con frontiere* $\partial\Omega$ *curva chiusa rettificabile. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) Ω *ha la proprietà di Pompeiu.*

(ii) *Sia* χ_Ω *la funzione caratteristica di* Ω *e per* $z = (z_1,z_2) \in C^2$, $x = (x_1,x_2) \in R^2$ *poniamo*

$$\hat{\chi}_\Omega(z) = \int_\Omega e^{-i\langle z,x\rangle} dx$$

Allora non deve esistere alcun $\alpha > 0$ *per cui*

$$\hat{\chi}_\Omega(z) \equiv 0 \quad su \quad M_\alpha \overset{def}{=} \{z=(z_1,z_2) \in C^2 \,|\, z_1^2 + z_2^2 = \alpha\} \tag{1.6}$$

(iii) $\{\partial\Omega\}$ *ha la proprietà di Morera.*

Alla luce del Teorema 1.3 l'esempio di Chakalov si può così reinterpretare. Sia χ_{B_R} la funzione caratteristica del disco in R^2 B_R. Allora (cfr. [Z,(10), p. 242])

$$(1.7) \qquad \hat{\chi}_{B_R}(z,z_2) = 2\pi R \frac{J_1(R\sqrt{z_1^2+z_2^2})}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \quad z_1,z_2 \in C.$$

Da (1.7) è perciò ovvio che se si sceglie $\alpha>0$ in modo tale che $R\sqrt{\alpha}$ sia un zero di J_1, allora

$$\hat{\chi}_{B_R} \equiv 0 \quad \text{su} \quad M_\alpha,$$

e quindi il disco B_R non ha la proprietà di Pompeiu. Sia ora

$$E_{ab} = \{x = (x_1,x_2) \in R^2 \,\Big|\, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1\}.$$

Usando la formula

$$(1.8) \qquad \hat{\chi}_{E_{a,b}}(z_1,z_2) = 2\pi ab \frac{J_1(\sqrt{a^2z_1^2+b^2z_2^2})}{\sqrt{a^2z_1^2+b^2z_2^2}}, \quad z_1,z_2 \in C,$$

è immediato verificare che non esiste alcun $\alpha>0$ tale che $\hat{\chi}_{E_{ab}} \equiv 0$ su M_α, a meno che $a=b$. Allora per il Teorema 1.3 *la regione ellittica* E_{ab} *ha la proprietà di Pompeiu*. Usando lo stesso risultato Brown, Schreiber e Taylor dimostrano che *ogni poligono in* R^2 e, più in generale, *ogni sottoinsieme convesso con almeno un angolo ha la proprietà di Pompeiu*. In [BST] non vengono considerati, a parte alcuni casi particolari quale l'ellisse, domini a frontiera regolare.

Nel 1976 S. Williams ha evidenziato una connessione notevole fra il problema di Pompeiu e la cosiddetta *congettura di Schiffer* (cfr. [Y, Problema 80, p. 688]:

" *Sia* $\Omega\subset R^n$ *un aperto limitato, commesso, con frontiera* C^2. *E' vero che l'esistenza di una soluzione non banale del problema sovradeterminato*

$$(1.9)\qquad \begin{cases} \Delta u = -\lambda u \quad \textit{in} \quad \Omega \;, \quad \lambda>0, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \text{cost.} \;, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

implica che Ω *sia una palla?*

Williams ha dimostrato in [W] che, se $\Omega\subset R^2$, allora *esiste una soluzione non banale di* (1.9) *se e solo se* Ω *non ha la proprietà di Pompeiu.* Osserviamo che dalla identità di Rellich si deduce che se u è soluzione di (1.9), allora posto $u\big|_{\partial\Omega} = a$ si ha

$$a^2 = \frac{2}{n}\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^2 dx,$$

quindi $a \neq 0$. Se perciò si pone

$$v = \frac{u}{\lambda a} - \frac{1}{\lambda}$$

allora u risolve (1.9) se e solo se v è soluzione di

$$(1.10)\qquad \begin{cases} \Delta v = -\lambda v - 1 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ v\big|_{\partial\Omega}=0 \quad \dfrac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}$$

Tornando al problema (1.9) è immediato verificare che se $\Omega=B_R=\{x\in R^n \mid |x|<R\}$, allora esistono infinite coppie $(u_j,\lambda_j)_{j\in N}$, che risolvono (1.9). In tal caso, infatti, la (1.9) diventa

$$(1.11)\qquad \begin{cases} r^2u''(r) + (n-1)ru'(r) + \lambda r^2u(r) = 0 \quad \text{in} \quad [0,R] \\ u(R) = a, \quad u'(0) = u'(R) = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzione generale

$$(1.12)\qquad u(r) = Cr^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Usando l'identità (cfr. [Le, (5.3.3), p. 103])

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$$

si ricava da (1.12)

$$(1.13)\qquad u'(r) = -C\sqrt{\lambda}\, r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Perchè si verifichi perciò la seconda condizione su u' in (1.11) bisogna che sia $\sqrt{\lambda}R$ uno zero di $J_{\frac{n}{2}}$. Ciò dimostra che vi sono infiniti $(\lambda_j)_{j\in N}$ e infinite (u_j) che risolvono (1.11). Viceversa, Berenstein ha dimostrato in [B] il seguente

<u>Teorema 1.4.</u> *Sia $\Omega\subset R^2$ un aperto limitato e semplicemente connesso, con $\partial\Omega\in C^2$. Se esistono infinite soluzioni di (1.9) allora Ω è un disco.*

Sebbene il Teorema 1.4 non sia direttamente legato al problema di Pompeiu, il metodo di dimostrazione è ingegnoso. L'approccio di Berenstein si basa su uno sviluppo asintotico della trasformata di Fourier di χ_Ω. Per essere più specifici richiamiamo la definizione di M_α, $\alpha>0$.

$$M_\alpha = \{(\zeta_1,\zeta_2)\in C^2 \mid \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \alpha\}. \tag{1.14}$$

Se $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2)\in M_\alpha$ si può scrivere

$$\zeta = r\xi + it\eta \quad , \ t \in R, \quad r > 0, \tag{1.15}$$

dove

$$\xi = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \eta = (-\sin\theta, \cos\theta) \quad , \quad 0\leq\theta\leq 2\pi .$$

Allora si ha

$$\zeta_1 = r\cos\theta - it \sin\theta \quad , \quad \zeta_2 = r\sin\theta + it \cos\theta$$

e quindi

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = r^2 - t^2 = \alpha. \tag{1.16}$$

Da (1.16) otteniamo che, per $\alpha>0$ fissato,

$$r = |t|(1 + o(\frac{1}{|t|})) \quad \text{quando } |t|\to+\infty . \tag{1.17}$$

L'analisi asintotica di $\hat{\chi}_\Omega(\zeta_1,\zeta_2)$ quando $(\zeta_1,\zeta_2)\in M_\alpha$, $\alpha>0$, e quindi vale (1.17), è molto difficile in quanto si ha a che fare con un integrale di Fourier a fase complessa, la cui parte immaginaria oscilla. L'esistenza di infinite soluzioni di (1.9) permette a Berenstein di dedurre, tramite il risultato

di Williams [W] e il Teorema 1.3 che esistono infiniti $\alpha_j>0$, $j\in N$, tali che

$$(1.18) \qquad \hat{\chi}_\Omega \equiv 0 \quad \text{su} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} M_{\alpha_j}.$$

La (1.18) consente di scegliere $r(t)$ in modo tale che

$$(1.19) \qquad \frac{|t|}{\ln r} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |t| \to +\infty.$$

Per mezzo di una partizione dell'unità si può scrivere $\hat{\chi}_\Omega$ come una somma di integrali del tipo

$$(1.20) \qquad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ir\langle\xi,x(s)\rangle}\alpha(s,t\eta)ds,$$

dove ξ,η sono come in (1.15), e $x(s) = (x_1(s),x_2(s))$ è una parametrizzazione locale di $\partial\Omega$. Le difficoltà nella stima asintotica di (1.20) provengono da quei pezzi di $\partial\Omega$ dove non vi sono punti critici della fase $\langle\xi,x(s)\rangle$. Una stima rozza del corrispondente integrale si ottiene prendendo il valore assoluto di I, desumendo per una $A>0$

$$(1.21) \qquad |I| \le C\,\frac{(1+|t|)}{r}\,e^{A|t|}.$$

Se ora si fa uso della (1.19) si ha

$$(1.22) \qquad I = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{quando} \quad r\to+\infty$$

La (1.22) è il punto cruciale della dimostrazione del seguente

<u>Teorema 1.5.</u> (Berenstein, [B]). *Sia $\Omega\subset R^2$ un aperto limitato semplicemente connesso avente frontiera analitica. Supponiamo che in questi punti $x_1,x_1,\ldots,x_n$ $\partial\Omega$ in cui la normale a $\partial\Omega$ è parallela a $\xi=(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi)$,*

le corrispondenti curvature di $\partial\Omega$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *siano diverse da zero. Se* $\zeta \in C^2$ *è come in* (1.15) *con* r,t *verificanti* (1.19), *allora quando* $r \to +\infty$ *vale*

$$(1.23) \qquad \hat{\chi}_{\partial\Omega}(\zeta) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |K_j|^{-1/2} \sigma_j \exp(-i\langle x_j, \zeta\rangle) + o(1) \right\},$$

dove $\sigma_j = \tau_j \exp((-i\frac{\pi}{4}) \operatorname{sign} k_j)$, *e* τ_j *è il versore (complesso) tangente a* $\partial\Omega$ *in* x_j.

In [GS] si ottiene sotto opportune ipotesi sul dominio Ω uno sviluppo asintotico di $\chi_\Omega(\zeta)$ quando $\zeta \in M_\alpha$ e quindi r,t sono legati dalla (1.17). Sembra naturale in tale contesto considerare integrali del tipo

$$(1.24) \qquad I = \int_\Gamma e^{-i\langle x,\zeta\rangle}(dx_1 + i dx_2) \quad , \quad \xi \in M_\alpha ,$$

dove Γ è una curva chiusa che giace su una fissata superficie V in C^2. Si ottiene così uno sviluppo asintotico di I che è completamente caratterizzato in termini della geometria di V e non dipende dalla parametrizzazione di Γ. Il metodo utilizzato è quello del *punto di sella* ideato da Riemann per stimare asintoticamente la funzione ipergeometrica confluente, [R]. Tale metodo forza un "passaggio al complesso" che non consente di dare direttamente uno sviluppo asintotico di (1.24) in termini della geometria di Γ quando questa curva giaccia in R^2. Come applicazione dell'analisi asintotica sopracitata noi otteniamo la proprietà di Pompeiu per una classe di domini piani le cui frontiere sono *sezioni in* R^2 di superfici analitiche in C^2.

2. SVILUPPI ASINTOTICI PER UNA CLASSE DI INTEGRALI DI FOURIER A FASE COMPLESSA E APPLICAZIONI

Sia $D \subset C$ un aperto connesso contenente la retta reale R e siano

$$x_i : D \to C \quad , \quad i = 1,2,$$

due funzioni analitiche di periodo 2π. Consideriamo la "superficie" di C^2 definita da

(2.1) $$V = \{x(z) = (x_1(z), x_2(z)) \,|\, z \in D\}.$$

Se $\tilde{D}$ è l'identificazione in R^2 di D e

(2.2) $$\lambda_j(u,v) = \mathrm{Re}\, x_j(u,v) \quad , \quad \mu_j(u,v) = \mathrm{Im}\, x_j(u,v) \ , \ j = 1,2,(u,v) \in \tilde{D}$$

possiamo identificare V con una superficie in R^4 ponendo

(2.3) $$\tilde{V} = \{(\lambda_1(u,v), \lambda_2(u,v), \mu_1(u,v), \mu_2(u,v)) \,|\, (u,v) \in \tilde{D}\}.$$

Sia Γ una curva su V. Siamo interessati allo studio asintotico di

(2.4) $$\zeta \longrightarrow \int_\Gamma e^{-i\langle x,\zeta\rangle}(dx_1+idx_2)$$

quando $\zeta \in M_\alpha$,$\alpha>0$. L'integrale in (2.4) è così definito.

Assumiamo che esista un'unica curva γ in D, tale che

(2.5) $$\Gamma = \{x(\gamma(\theta)) \,|\, \theta \in [a,b]\}.$$

Allora

$$(2.6)\qquad \int_\Gamma e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx_1+idx_2) = \int_\gamma e^{-i\langle x(z),\zeta\rangle}(x_1'(z)+ix_2'(z))dz$$

dove si è posto $x_i'(z) = \frac{dx_i}{dz}(z)$, $i = 1,2$. Osserviamo che se $\zeta\in M_\alpha$ allora $i\zeta\in M_{-\alpha}$ e quindi possiamo riscrivere (2.6) usando (1.15) come

$$(2.7)\qquad \int_\gamma e^{-(r\langle x,\xi\rangle+it\langle x,\eta\rangle)}(x_1'+ix_2')dz$$

con $\zeta\in M_{-\alpha}$. Sviluppando in serie di Taylor otteniamo da (2.7) per $\zeta\in M_{-\alpha}$

$$(2.8)\qquad \int_\Gamma e^{-\langle x,\zeta\rangle}(dx_1+idx_2) = \int_\gamma e^{-r\langle x,\xi+i\eta\rangle}(x_1'+ix_2')dz$$

$$- i(t-r)\int_\gamma e^{-r\langle x,\xi+i\eta\rangle}\langle x,\eta\rangle(x_1'+ix_2')dz$$

$$- \frac{(t-r)^2}{2}\int_\gamma e^{-r(x,\xi+i\eta\rangle}\langle x,\eta\rangle^2(x_1'+ix_2')dz$$

$$+ \frac{i}{6}(t-r)^3\int_\gamma e^{-r\langle x,\xi\rangle}k(t,r,z)(x_1'+ix_2')dz.$$

Usando la (1.17) otteniamo la seguente stima del resto nell'ultimo integrale a secondo membro di (2.8)

$$(2.8)\qquad |k(t,r,z)|\leq C|e^{-ir\langle x,\eta\rangle}|e^{C|t-r|}\quad \text{su}\ \gamma .$$

Assumiamo ora che Γ sia una curva semplice e chiusa. Allora (si v. (S.5))

$$(2.9) \qquad \gamma(a) = \gamma(b) \qquad \text{oppure} \qquad |\gamma(a)-\gamma(b)| = 2\pi.$$

Se poniamo

$$(2.10) \qquad \psi(z) = \langle x(z),\xi+i\eta\rangle,$$

risulta

$$(2.11) \qquad \psi = \langle x,\xi+i\eta\rangle = (x_1+ix_2)e^{-i\theta} .$$

Un'integrazione per parti, (2.9) e (2.11) danno

$$(2.12) \qquad \int_\gamma e^{-i\langle x(z),\zeta\rangle}(x_1'(z)+ix_2'(z))dz = 0.$$

Usando (2.12) e (2.8) otteniamo per $\zeta\in M_{-\alpha}$

$$(2.13) \qquad \int_\Gamma e^{-\langle x,\zeta\rangle}(dx_1+idx_2) = -i(t-r)\int_\gamma e^{-r\langle x,\xi+i\eta\rangle}\langle x,\eta\rangle(x_1'+ix_2')dz$$

$$- \frac{(t-r)^2}{2}\int_\gamma e^{-r\langle x,\xi+i\eta\rangle}\langle x,\eta\rangle^2(x_1'+ix_2')dz$$

$$+ \frac{i}{6}(t-r)^2\int_\gamma e^{-r\langle x,\xi\rangle}k(t,r,z)(x_1'+ix_2')dz.$$

Esaminiamo ora i punti critici della fase

$$\langle x,\xi+i\eta\rangle$$

degli integrali a secondo membro di (2.13). Questi sono i punti $z_0\in D$ in cui si ha

$$(2.14)\qquad \alpha x'(z_0)\ ,\ \xi+i\eta\rangle = 0\ ,\quad \text{dove}\quad x'(z_0) = (x_1'(z_0),x_2'(z_0))$$

Usando le equazioni di Cauchy-Riemann si riconosce che *i punti* z_0 *in cui* (2.14) *vale si caratterizzano come quei punti in cui il vettore di* R^4 $(\xi,-\eta)$ *è ortogonale alla superficie* $\tilde{V}$ *in* (2.3) *nel punto* $(\lambda_1(z_0),\lambda_2(z_0),\mu_2(z_0)) = (\lambda(z_0),\mu(z_0))$.

Usiamo (2.11) per riscrivere (2.13)

$$(2.15)\qquad \int_\Gamma e^{-\langle x,\zeta\rangle}(dx_1-idx_2) = -i(t-r)e^{i\theta}\int_\gamma e^{-r\psi}\langle x,\eta\rangle\psi' dz$$

$$-\frac{(t-r)^2}{2}\, e^{i\theta}\int_\gamma e^{-r\psi}\langle x,\eta\rangle^2\psi'\, dz$$

$$+\frac{i}{6}(t-r)^2\, e^{i\theta}\int_\gamma e^{-r\langle x,\xi\rangle}\, K\psi'\, dz.$$

Ora assumiamo che esista almeno un punto $z_0 \in D$ per cui vale (2.14). Per poter applicare il metodo del punto di sella richiediamo inoltre che esista un $\theta\in[0,2\pi]$ e una curva C^1 γ tutta contenuta nella regione

$$\text{Re}\psi(z) \geqq \text{Re}\ \psi(z_1).$$

Non è restrittivo supporre che γ sia in realtà contenuto nella regione $\text{Re}\psi(z) > \text{Re}\psi(z_1)$, facendo al più eccezione di altri punti critici $z_2,\dots,z_n$ tali che

$$(2.16)\qquad \text{Re}\psi(z_j) = \text{Re}\psi(z_1)\quad ,\quad j = 2,\dots,n.$$

L'esistenza di γ come sopra ha una ben precisa interpretazione geometrica, v. [GS]. A questo punto rimandiamo a [GS] per un'analisi dettagliata di (2.15). Diciamo soltanto che l'identità finale a cui si perviene è

$$(2.17)\qquad \int_\Gamma e^{-\langle x,\zeta\rangle}(dx_1+idx_2) = i\,\frac{(t-r)}{r}\,e^{i\theta}\int_\gamma e^{-r\psi}\langle x',\eta\rangle dz - \frac{(t-r)^2}{r}\,e^{i\theta}\int_\gamma e^{-r\psi}\langle x,\eta\rangle\langle x',\eta\rangle dz - \frac{(t-r)^3}{6}\,e^{i\theta}\,q(t,r)$$

dove

$$(2.18)\qquad |q(t,r)| \le C\,e^{-rRe\psi(z_1)}\,e^{C|t-r|}\;.$$

A questo punto s'applica il metodo di Riemann del punto di sella agli integrali che compaiono nella (2.17), si v. ad es. [01, Th. 7.1, p. 127]

$$(2.19)\qquad \int_\gamma e^{-r\psi}\langle x',\eta\rangle\, dz = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{j=1}^{n} e^{-r\psi(z_j)}\,(a_j+0(\frac{1}{\gamma}))$$

$$(2.20)\qquad \int_\gamma e^{-r\psi}\langle x,\eta\rangle\langle x',\eta\rangle dz = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{j=1}^{n} e^{-r\psi(z_j)}(b_j+0(\frac{1}{r}))$$

dove

$$(2.21)\qquad a_j = \frac{\langle x'(z_j),\eta\rangle}{(2\psi''(z_j))^{1/2}}\quad,\quad b_j = \frac{\langle x(z_j,\eta\rangle\langle x'(z_j),\eta\rangle}{(2\psi''(z_j)^{1/2}}\quad,\quad j=1,\dots,n.$$

Usando (2.18)-(2.21) in (2.17) si perviene alfine al seguente sviluppo per $\zeta\in M_{-\alpha}$

$$(2.22)\qquad \int_\Gamma e^{-\langle x,\xi\rangle}(dx_1+idx_2) = i\,\frac{t-r}{r^{3/2}}\,e^{i\theta}\sum_{j=1}^{n} e^{-\langle x(z_j),\zeta\rangle}\,\{a_j + 0(\frac{1}{r})\}.$$

Usando la (1.17) nella (2.22) si perviene così al seguente teorema

che costituisce il risultato principale di [GS].

<u>Teorema 2.1.</u> (cfr. [GS]). *Sia* V *una superficie in* C^2 *e sia* Γ *una curva chiusa su* V. *Identificando* V *con una superficie in* R^4 *assumiamo che:*

(i) Γ *passi per* n *punti* $x_1,\ldots,x_n$ *di* V *in cui il piano tangente sia ortogonale al vettore* $(\xi,-\eta)\in R^4$, *con* $\xi = (1,0)$, $\eta = (0,1)$, *e perciò a ogni vettore* $(\xi,-\eta)$ *con* $\xi = (\cos\theta,\sin\theta)$, $\eta = (-\sin\theta, \cos\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$;

(ii) *per qualche* $\theta\in[0,2\pi]$, Γ *giaccia da un solo lato dell'iperpiano normale a* $(\xi,-\eta)$ *e passante per* $x_1,\ldots,x_n$.

Allora per $\zeta\in M_{-\alpha}$, $\alpha>0$, *vale*

$$\int_\Gamma e^{-\langle x,\zeta\rangle}(dx_1+idx_2) = \frac{i\alpha}{2r^{5/2}}\, e^{i\theta} \sum_{j=1}^{n} e^{-\langle x_j,\zeta\rangle}(a_j + O(\frac{1}{r})) \tag{2.23}$$

quando $r\to+\infty$. *I coefficienti* a_j *in* (2.23) *sono dati da* (2.21). *Per ogni* $j=1,\ldots,n$ *si ha* $a_j \neq 0$.

Si confronti ora la (2.23) con la (1.23). La prima contiene la potenza $r^{-5/2}$ mentre la seconda $r^{-1/2}$. Tale differenza è dovuta al fatto che mentre il risultato di Berenstein si basa sull'assunzione piuttosto forzata che

$$r \sim e^{t^2} \quad \text{quando} \quad |t|\to+\infty \ ,$$

il Teorema 2.1 viene dimostrato sotto la sola ipotesi che

$$r \sim |t| \quad \text{quando} \quad |t| \to+\infty \ .$$

A illustrazione delle ipotesi del Teorema 2.1 riportiamo due esempi significativi.

Esempio 2.1. Il *cerchio* in C^2. Sia $a > 0$. Poniamo

$$V = \{(a \cos z, a \sin z) \,|\, z \in C\} \tag{2.24}$$

e identifichiamo V con

$$\tilde{V} = \{(a \cos u \cosh v, a \sin u \cosh v, -a \sin u \sinh v, a \cos u \sinh v) \,|\, (u,v) \in R^2\} \tag{2.25}$$

Poniamo per $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$, $\mu = (\mu_1,\mu_2)$

$$X = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\mu}{\partial u}\right) \quad , \quad Y = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \frac{\partial\mu}{\partial v}\right) \tag{2.26}$$

La condizione che il piano tangente in un punto di $\tilde{V}$ sia ortogonale al vettore di R^4 $(\xi,-\eta)$, con $\xi = (1,0)$,$\eta=(0,1)$, si esprime così

$$\langle X,(\xi,-\eta)\rangle = 0 \quad , \quad \langle Y, (\xi,-\eta) \rangle = 0. \tag{2.27}$$

Usando ora la definizione (2.25) di $\tilde{V}$ otteniamo per (2.27)

$$\sin u(\cosh v - \sinh v) = 0$$

$$\cos u(\cosh v - \sinh v) = 0 ,$$

da cui si deduce che sul cerchio in R^4 non v'è alcun punto in cui il piano tangente è ortogonale a $(\xi,-\eta)$. Si ricordi che la sezione del cerchio in R^4 con R^2, il cerchio nel piano, non ha la proprietà di Pompeiu.

<u>Esempio 2.2.</u> L'*ellisse* in C^2. Siano a,b > 0 e poniamo

(2.28) $V = \{(a \cos z, b \sin z) \mid z \in C\}$,

che identifichiamo con

(2.29) $\tilde{V} = (a \cos u \cosh v, b \sin u \cosh v, -a \sin u \sinh v, b \cos u \sinh v) \mid (n,v) \in R^2\}$.

Le (2.27) si leggono ora così

$$\sin u(a \cosh v - b \sinh v) = 0 \qquad (2.30)$$
$$\cos u(a \sinh v - a \cosh v) = 0.$$

Le (2.30) ammettono le soluzioni

(2.31) $(k\pi , \frac{1}{2} \ln (\frac{a+b}{a-b}))$, k Z.

Vi sono perciò, in base a quanto precedentemente osservato, infiniti punti critici della fase $z \to \langle x(z), \xi + i\eta\rangle$, $z \in C$, dove $x(z) = (a \cos z, b \sin z)$.

Il Teorema 2.1 può essere usato per dedurre la proprietà di Pompeiu per una certa classe di domini analitici di C. Sia infatti

$$V = \{x(z) = (x_1(z), x_2(z)) \mid z \in D\}$$

come in precedenza e assumiamo che Ω sia un aperto limitato semplicemente connesso

di C tale che

$$\partial\Omega = \{x(z) \,|\, z \quad D \ , \ \mathrm{Im} z = 0\}.$$

Vale allora il seguente

Teorema 2.2. *Se esiste una curva chiusa* Γ *su* V *che abbia le proprietà* (i), (ii) *del Teorema 2.1., che sia omotopa a* $\partial\Omega$, *e se risulta per* $r \to +\infty$

$$\sum_{j=1}^{n} e^{-ir\langle x_j,(\xi,\eta)\rangle} a_j \neq 0, \tag{2.32}$$

allora Ω *ha la proprietà di Pompeiu.*

Nella (2.32) se $z_1,\ldots,z_n$ sono i punti critici della fase $\langle x(z),\xi+i\eta\rangle$ s'è posto $x_j = x(z_j)$, mentre a_j sono definiti come in (2.21). Osserviamo esplicitamente che la (2.32) è verificata se e solo se esistono $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, con $i \neq j$, tali che

$$\langle x_i,(\xi,\eta)\rangle \neq \langle x_j,(\xi,\eta)\rangle, \tag{2.33}$$

oppure se

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \neq 0. \tag{2.34}$$

Osserviamo inoltre che (2.33) equivale a dire che non tutti i punti $x_1,\ldots,x_n$ appartengono all'iperpiano normale a (ξ,η).

In [GS] vengono dati alcuni esempi di applicazione del Teorema 2.2. Riportiamo qui quello significativo dell'ellisse.

Esempio 2.3. L'*ellisse* in R^2.

Siano $0<b<a$ e consideriamo $\Omega = E_{ab} \subset R^2$ tale che

$$\partial\Omega = \{ (a \cos, b \sin s) \,|\, 0 \leq s \leq 2\pi \}.$$

Sia V come in (2.28). Se poniamo, cfr. (2.11),

$$\psi(z) = e^{-i\theta}(a \cos z + ib \sin z), \tag{2.35}$$

i punti critici di ψ sono dati dalla (2.31), cioè

$$z_k = k\pi + i \frac{1}{z} \ell n \left(\frac{a+b}{a-b}\right) \quad , \quad k \quad Z. \tag{2.36}$$

Se prendiamo $\theta = 0$ in (2.35), poniamo

$$z_1 = \pi + \frac{i}{z} \ell n \left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$

Consideriamo la regione

$$\operatorname{Re}\psi(z) \geq \operatorname{Re}\psi(z_1). \tag{2.37}$$

Questa è rappresentata come in figura

Scegliamo γ come nella figura e poniamo

$$(2.38) \qquad \Gamma = \{(a\cos\gamma(\tau)\,,\, b\sin\gamma(\tau))\,|\,\tau \quad [a,b]\}.$$

Allora la (2.32) del Teorema 2.1 dà via al Teorema di Cauchy

$$(2.31) \qquad \int_{\partial\Omega} e^{-\langle x,\zeta\rangle}(dx_1 + idx_2) = \int_{\Gamma} e^{-\langle x,\xi\rangle}(dx_1 + idx_2)$$

$$= \int_{\gamma} e^{-\langle x(z),\zeta\rangle}(dx_1 + idx_2) = \frac{i\alpha}{2r^{5/2}}\, e^{r\sqrt{a^2-b^2}}\,(a_1 + O(\frac{1}{r}))$$

quando $\zeta = (r,it) \in M_{-\alpha}$ e $r \to +\infty$.

La (2.35) dà una dimostrazione, diversa da quella basata sulla (1. del fatto che $\Omega = E_{ab}$ ha la proprietà di Pompein.

Se in (2.35) prendiamo invece $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z_1 = \frac{i}{2}\,\ell n(\frac{a+b}{a-b})$, e consideriamo la regione $\mathrm{Re}\psi(z) \geq \mathrm{Re}\psi(z_1)$ questa è data dal grafico
Se γ è come nella figura sia Γ definita come in (2.38). Applicando nuovamente (2.32) otteniamo

$$(2.40) \qquad \int_{\partial\Omega} e^{-\langle x,\zeta\rangle}\,(dx_1 + idx_2) =$$

$$= -\frac{\alpha}{2r^{5/2}}\,\{e^{ir\sqrt{a^2-b^2}}\,a_1 + e^{-ir\sqrt{a^2-b^2}}\,a_2 + O(\frac{1}{r})\}$$

quando $\zeta = (it,-r)\;\; M_{-\alpha}$ e $r \to +\infty$.

La (2.40) implica di nuovo che $\chi_\Omega \not\equiv 0$ su M_α e quindi Ω ha la proprietà di Pompeiu.

BIBLIOGRAFIA

[B] C.A. BERENSTEIN, An inverse spectral theorem and its relation to the Pompeiu problem, J. d'An. Math., vol. 37 (1980), 128-144.

[BST] L. BROWN, B.M. SCHREIBER and A.B. TAYLOR, Spectral synthesis and the Pompeiu problem, Ann. Inst. Fourier, 23 (3), (1973), 125-154.

[C] L. CHARALOV, Sur un probleme de D. Pompeiu, Annaire Univ. Sofia Fac. Phys. Math., Livre 1, 40, 1-44 (1944).

[Ch] C. CHRISTOV, Sur une probleme de M. Pompeiu, Mathematica, 23 (1947-48), 103-107.

[GS] N. GAROFALO and F. SEGALA, Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem, preprint.

[P1] D. POMPEIU, Sur certains systemes d'equations lineaires et sur une propriêté intêgrale des fonctions de plusieurs variables, C.R. Acad. Sci. Paris, 188 (1929) 1138-1139.

[P2] D. POMPEIU, Sur une proprieté integrale des functions de deux variables réelles, Bull. Sci. Acad. Royale Belgique, (5), 15 (1929), 265-269.

[R] B. RIEMANN, Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita, Complete works, Dover, N.Y. (1953).

[S] L. SCHWARTZ, Theorie generale des fonctions moyenne-periodique, Ann. of Math., 48 (1947), 857-929.

[W] S.A. WILLIAMS, A partial solution of the Pompeiu problem, Math. Ann., 223 (1976), 183-190.

[Y] S.T. YAU, Seminar on differential geometry, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, no. 102 (1982).

[Z] L. ZALCMAN, Analyticity and the Pompeiu problem, Arch. Rat. Mech. An., vol. 47 (1972), 237-254.